Tentamen Discrete Structuren

dinsdag 8 februari 2005, 9 - 12 uur

Elke opgave levert maximaal 15 punten op. Het cijfer is (p/10) + 1, afgerond op gehele en halve waarden, waarbij p het totaal aantal behaalde punten is. Wie een 5 of hoger heeft gehaald voor de toets van 17 december 2004, hoeft de eerste 3 opgaven niet te maken: het toetsresultaat telt voor de helft mee in het tentamenresultaat. Heb je bij de toets 5 of hoger gehaald en maak je ook de opgaven 1, 2 en 3, dan telt het beste resultaat.

NB. Beargumenteer je antwoorden.

1. Een propositionele formule is in *disjunctieve normaalvorm* als het een disjunctie van 1 of meer conjuncties van 1 of meer (negaties van) propositionele variabelen is. Voorbeelden staan in het tweede deel van deze opgave.

   (a) Zet $\neg(p \wedge ((q \leftrightarrow r) \rightarrow r))$ *via een geannoteerd lineair bewijs* om in een disjunctieve normaalvorm.

   (b) Bekijk de volgende disjunctieve normaalvormen:

   $$p \vee (q \wedge r \wedge \neg q)$$
   $$(p \wedge q \wedge r) \vee (p \wedge q)$$
   $$(p \wedge \neg q) \vee q$$
   $$(p \wedge \neg r) \vee (\neg p \wedge \neg r) \vee q$$

   Elk van deze disjunctieve normaalvormen kan vereenvoudigd worden, dwz. vervangen worden door een logisch equivalente disjunctieve normaalvorm die korter is. Laat dit zien, en vergeet de argumentatie niet.

2. Bewijs: het produkt xy van een rationaal getal $x \neq 0$ en een irrationaal getal y is irrationaal.

3. (a) Geef een definitie van

   propositie p is invariant van de loop **while** g **do** S.

   (b) Beschouw het volgende programmafragment (m, n zijn gehele getallen):

```
while  0 < n  do
   m := m + n
   n := m - n
   m := m - n
```

   Laat zien dat $m + n = 5$ een invariant is.

Z.O.Z.

4. Zij $G = (V, E)$ een ongerichte graaf.

   (a) Geef definities van de begrippen Eulercircuit en Eulerpad (in G).

   (b) Formuleer de conditie $C(G)$ uit de stelling van Euler:

   als $C(G)$ geldt, dan bevat G een Eulercircuit.

   (c) Bewijs de omkering van de stelling van Euler: als G een Eulercircuit heeft, dan geldt $C(G)$.

5. Deze opgaven gaat over logische netwerken. Een halve opteller (half-adder) is een netwerk met twee inputs x en y, en twee outputs S en C: er geldt dat CS, als binair getal, de som is van x en y. Een (gehele) opteller (full-adder) lijkt hierop, maar heeft inputs x, y en z, en CS is de binaire som van deze drie inputs.

   (a) Beschrijf, zowel voor de halve als voor de gehele opteller, de Boole'se functies voor S en C.

   (b) Schets een logisch netwerk voor de halve opteller.

   (c) Schets, gebruik makend van twee halve optellers en een OF-poort, een netwerk voor de gehele opteller.

6. (a) Laat mbv. een tegenvoorbeeld zien dat

   $$\forall x(p(x) \to \exists y\, q(x,y)) \Rightarrow \exists y \forall x(p(x) \to q(x,y))$$

   niet geldt.

   (b) Bewijs mbv. een geannoteerd lineair bewijs

   $$\exists y \forall x(p(x) \to q(x,y)) \to \forall x(p(x) \to \exists y\, q(x,y))$$